MAT-4271 Démonstration de conjectures

Une conjecture est un énoncé qu'on croit vrai, mais qui n'a pas été démontré ou réfuté. Démontrer une conjecture consiste à prouver que l'énoncé est toujours vrai. Pour ce faire, la démonstration doit être algébrique.

Capsules vidéo :

SN4 Conjectures cours #1 – Luc Allard : https://youtu.be/Pl0WAB5tIuU

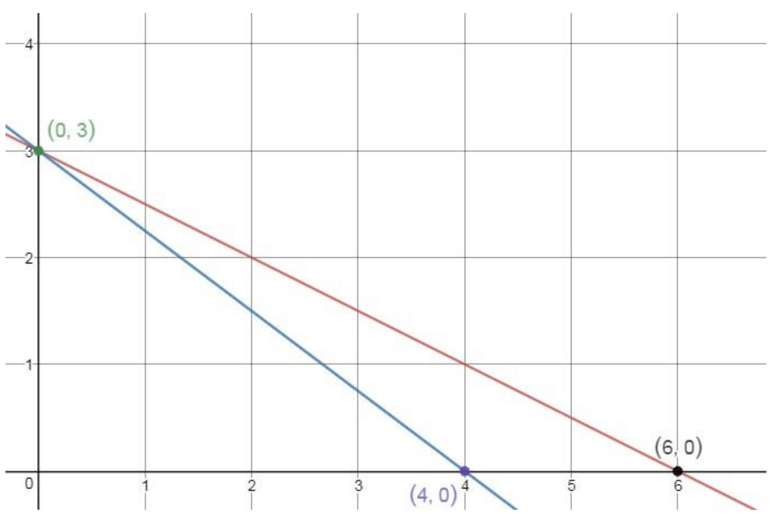
SN4 Conjectures cours #2 – Luc Allard : https://youtu.be/Rh-jfn-10l8

Exemple :

Soit d_1 et d_2, deux droites obliques qui ont la même ordonnée à l'origine.

Démontrer la conjecture suivante : Le rapport des pentes des droites d_1 et d_2 est égal à l'inverse du rapport de leurs abscisses à l'origine.

Il est souvent utile de **faire un exemple (ou quelques exemples) avec des valeurs numériques** avant de faire la démonstration algébrique. Il est aussi utile de **faire un graphique** qui représente la situation. Dans ce cas-ci, on trace deux droites qui ont la même ordonnée à l'origine, c'est-à-dire qui se croisent sur l'axe des ordonnées (axe des y).



Il est souhaitable d'**inscrire les coordonnées des points importants sur le graphique**. Dans ce cas-ci, on mentionne l'ordonnée à l'origine et l'abscisse à l'origine dans la description de la conjecture à démontrer. On inscrira donc les coordonnées à l'origine des deux droites sur le graphique. Comme ces valeurs sont inconnues, on se donnera un exemple en choisissant des valeurs quelconques qui respectent la description de la situation. Comme il est précisé dans la situation que les deux droites ont la même ordonnée à l'origine, on pourrait, par exemple, choisir une ordonnée à l'origine valant 3 et des abscisses à l'origine de 6 et de 4 pour les droites d_1 et d_2 respectivement. Dans l'exemple qu'on se donne, il est important de choisir des nombres distincts pour chaque valeur inconnue, ce qui permet d'éviter la confusion.

1) Comme on parle du rapport des pentes dans la conjecture à démontrer, on va déterminer la pente de chacune des droites.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Pour la droite d_1 :

$$a_1 = \frac{0-3}{6-0} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

Pour la droite d_2 :

$$a_2 = \frac{0-3}{4-0} = \frac{-3}{4}$$

2) Le rapport des pentes des droites d_1 et d_2 est :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{-3}{4}} = \frac{-1}{2} \div \frac{-3}{4} = \frac{-1}{2} \times \frac{-4}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

3) Le rapport des abscisses à l'origine est égal à $\frac{6}{4}$ ou $\frac{3}{2}$.

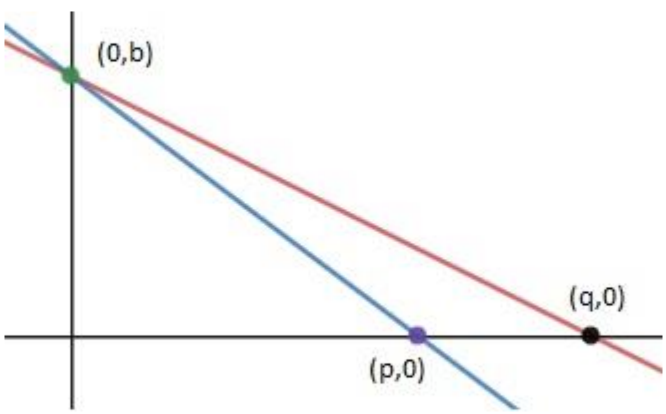
4) On observe que le rapport des pentes est égal à l'inverse du rapport des abscisses à l'origine pour des droites qui ont 3 comme ordonnée à l'origine et respectivement 6 et 4 comme abscisses à l'origine.

Une fois qu'on a compris la démarche pour faire la démonstration, il faut **reprendre la démarche mais avec des variables**.

On trace un **nouveau graphique** avec deux droites qui se croisent au même point sur l'axe des ordonnées.

Comme on ne connaît pas la valeur de l'ordonnée à l'origine et de l'abscisse à l'origine des droites, on utilise des lettres pour les représenter. On peut prendre la lettre *b* pour représenter l'ordonnée à l'origine des deux droites et les lettres *p* et *q* pour représenter les abscisses à l'origine respectives des deux droites. On aurait pu prendre n'importe quelle autre lettre pour représenter les abscisses à l'origine. Il est important toutefois de ne pas prendre la lettre « b » qui est déjà utilisée pour l'ordonnée à l'origine, ni la lettre « a » qui représente la pente des droites.

On inscrit les coordonnées à l'origine des deux droites sur le graphique.



1) Comme on parle du rapport des pentes dans la conjecture à démontrer, on va déterminer la pente de chacune des droites.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Pour la droite d_1 :

$a_1 = \frac{0-b}{p-0}$

$a_1 = \frac{-b}{p}$

Pour la droite d_2

$a_2 = \frac{0-b}{q-0}$

$a_2 = \frac{-b}{q}$

2) On établit le rapport des pentes des droites d_1 et d_2 :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{-b}{p}}{\frac{-b}{q}} = \frac{-b}{p} \div \frac{-b}{q} = \frac{-b}{p} \times \frac{-q}{b} = \frac{q}{p}$$

3) Le rapport des abscisses à l'origine est $\frac{p}{q}$

4) On peut conclure que le rapport des pentes est égal à l'inverse du rapport des abscisses à l'origine. La démarche étant algébrique, on a donc démontré la conjecture : cette dernière est toujours vraie.

Exercices

1.

Soit une droite oblique et une parabole ayant la même ordonnée à l'origine. Les paramètres *a* et *b* de l'équation de la parabole donnée sous forme générale valent respectivement 1 et 0.

Démontrer la conjecture suivante : La droite a deux points d'intersection avec la parabole.

2.

Soit la droite d_1 dont l'abscisse à l'origine est le double de l'ordonnée à l'origine et la droite d_2 dont les coordonnées à l'origine ont les mêmes valeurs que celles de la droite d_1, mais inversement. (L'ordonnée à l'origine de d_2 = l'abscisse à l'origine de d_1 et l'abscisse à l'origine de d_2 = l'ordonnée à l'origine de d_1.)

Démontrer la conjecture suivante : L'abscisse et l'ordonnée du point de rencontre des deux droites ont la même valeur.

3.

Soit d_1 et d_2, deux droites obliques qui ont la même abscisse à l'origine.

Démontrer la conjecture suivante : Le rapport des ordonnées à l'origine des droites d_1 et d_2 est égal au rapport de leurs pentes.

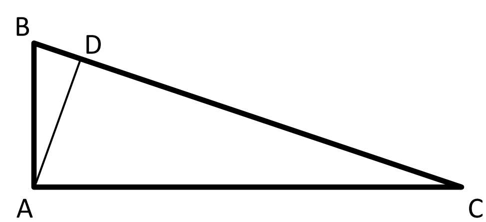
4.

Soit une parabole et une droite oblique qui ont la même ordonnée à l'origine. Le paramètre *b* de l'équation de la parabole donnée sous forme générale est différent de la pente de la droite.

Démontrer la conjecture suivante : La droite coupe la parabole en deux endroits distincts.

5.

Soit le triangle ABC, rectangle en A, dont la cathète $\overline{AC}$ mesure 3 fois la longueur de la cathète $\overline{AB}$. Soit également le segment $\overline{AD}$ perpendiculaire à $\overline{BC}$.



Démontrer que l'ordonnée du point D est 3 fois plus grande que son abscisse.

6.

Soit deux paraboles dont les paramètres *a* et *c* de l'équation donnée sous forme générale sont les mêmes et dont les paramètres *b* sont différents.

Démontrer la conjecture suivante : Les deux paraboles ont un seul point d'intersection.

7.

Soit les droites $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ et $\frac{x}{-3q}+\frac{y}{3p}=1$

Démontrer que les deux droites sont perpendiculaires.

8.

Soit le système formé par les droites $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ et $\frac{2x}{3p}+\frac{2y}{3q}=2$

Démontrer que le système n'a pas de solution.