MATHÉMATIQUES

MAT-5171-2

Modélisation algébrique et graphique en contexte fondamental II

Problèmes avec des paramètres

SÉRIE A

QUESTIONNAIRE
ET
SOLUTIONNAIRE

Préparé par Roderich Jr Denis
Révisé par Martin Hébert
Novembre 2019
Mat-5171-2

Situation-problème 1 : Fonction quadratique

Soit la fonction quadratique suivante :

$$f(x) = a\left(b(x+h)\right)^2 + k$$

où a, b, h, et k sont des nombres réels positifs non nuls.

Si (s + k) est la valeur de l'ordonnée à l'origine de la fonction f(x) où s est un nombre réel positif non nul, montrez que

$$h = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{s}{a}}$$

Solution

$$
\begin{aligned}
f(0) = s+k \Rightarrow s+k &= a\left[b(0+h)\right]^2 + k \\
&\Rightarrow s + k - k = a\left[bh\right]^2 \\
&\Rightarrow s = ab^2h^2 \\
&\Rightarrow h^2 = \frac{s}{ab^2} \\
&\Rightarrow h = \pm\sqrt{\frac{s}{ab^2}} \\
&\Rightarrow h = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{s}{a}} \quad \text{ou} \quad h = -\frac{1}{b}\sqrt{\frac{s}{a}} \ \text{(à rejeter)}
\end{aligned}
$$

Réponse : $\mathbf{h = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{s}{a}}}$

Situation-problème 2 : **Fonction valeur absolue.**

Soit la fonction valeur absolue suivante :

$$f(x) = a\left|b(x+h)\right| + k$$

où a, b, h et k sont des nombres réels positifs non nuls.

Si (s + k) est la valeur de l'ordonnée à l'origine de la fonction f(x) où s est un nombre réel positif non nul, montrez que

$$h = \frac{s}{ab}$$

Solution

$$\begin{aligned} f(0) = s+k \Rightarrow s+k &= a\left|b(0+h)\right| + k \\ &\Rightarrow s + k - k = a\left|bh\right| \\ &\Rightarrow s = a\left|bh\right| \\ &\Rightarrow \left|bh\right| = \frac{s}{a} \\ &\Rightarrow bh = \pm\frac{s}{a} \\ &\Rightarrow h = \frac{s}{ab} \text{ ou } h = -\frac{s}{ab} \text{ (à rejeter)} \end{aligned}$$

Réponse : $\mathbf{h = \frac{s}{ab}}$

Situation-problème 3 : **Fonction rationnelle**

Soit la fonction racine rationnelle suivante :

$$f(x) = \frac{a}{b(x+h)} + k$$

où a, b, h et k sont des nombres réels positifs non nuls.

Si (s + k) est la valeur de l'ordonnée à l'origine de la fonction f(x) où s est un nombre réel positif non nul, montrez que

$$h = \frac{a}{bs}$$

Solution

$$f(0) = s+k \Rightarrow s+k = \frac{a}{b(0+h)} + k$$

$$\Rightarrow s + k - k = \frac{a}{bh}$$

$$\Rightarrow bh = \frac{a}{s}$$

$$\Rightarrow h = \frac{a}{bs}$$

Réponse : $\mathbf{h = \frac{a}{bs}}$

Situation-problème 4 : **Fonction racine carrée**

Soit la fonction racine carrée suivante :

$$f(x) = a\sqrt{b(x+h)} + k$$

où a, b, h et k sont des nombres réels positifs non nuls.

Si (s + k) est la valeur de l'ordonnée à l'origine de la fonction f(x) où s est un nombre réel positif non nul, montrez que

$$h = \frac{s^2}{a^2 b}$$

Solution

$$\begin{aligned} f(0) = s + k \Rightarrow s + k &= a\sqrt{b(0+h)} + k \\ \Rightarrow s + k - k &= a\sqrt{bh} \\ \Rightarrow s &= a\sqrt{bh} \\ \Rightarrow s^2 &= (a\sqrt{bh})^2 \\ \Rightarrow s^2 &= a^2bh \\ \Rightarrow h &= \frac{s^2}{a^2b} \end{aligned}$$

Réponse : $\mathbf{h = \dfrac{s^2}{a^2b}}$

Situation-problème 5 : **Fonction exponentielle.**

Soit la fonction exponentielle suivante :

$$f(x) = a c^{b(x+h)} + k$$

où a, b, c, h, et k sont des nombres réels positifs non nuls.

Si (s + k) est la valeur de l'ordonnée à l'origine de la fonction f(x) où s est un nombre réel positif non nul, montrez que

$$h = \frac{1}{b} \log_c \frac{s}{a}$$

Solution

$$\begin{aligned}
f(0) = s + k \Rightarrow\ & s + k = a c^{b(0+h)} + k \\
\Rightarrow\ & s + k - k = a c^{bh} \\
\Rightarrow\ & s = a c^{bh} \\
\Rightarrow\ & \frac{s}{a} = c^{bh} \\
\Rightarrow\ & \log_c \frac{s}{a} = \log_c c^{bh} \\
\Rightarrow\ & \log_c \frac{s}{a} = bh\log_c c \\
\Rightarrow\ & \log_c \frac{s}{a} = bh \\
\Rightarrow\ & h = \frac{1}{b} \log_c \frac{s}{a}
\end{aligned}$$

Réponse : $\mathbf{h = \frac{1}{b} \log_c \frac{s}{a}}$

Situation-problème 6 : **Fonction logarithmique**

Soit la fonction logarithmique suivante :

$$f(x) = a \log_c b(x + h) + k$$

où a, b, c, h, et k sont des nombres réels positifs non nuls.

Si (s + k) est la valeur de l'ordonnée à l'origine de la fonction f(x) où s est un nombre réel positif non nul, montrez que

$$h = \frac{1}{b} c^{\frac{s}{a}}$$

Solution

$$\begin{aligned}
f(0) = s + k &\Rightarrow s + k = a \log_c b(0 + h) + k \\
&\Rightarrow s + k - k = a \log_c bh \\
&\Rightarrow s = a \log_c bh \\
&\Rightarrow \frac{s}{a} = \log_c bh \\
&\Rightarrow c^{\frac{s}{a}} = c^{\log_c bh} \\
&\Rightarrow c^{\frac{s}{a}} = bh \\
&\Rightarrow h = \frac{1}{b} c^{\frac{s}{a}}
\end{aligned}$$

Réponse : $\mathbf{h = \frac{1}{b} c^{\frac{s}{a}}}$

Situation-problème 7 : Fonction sinusoïdale

Soit la fonction sinusoïdale suivante :

$$f(x) = a \sin b(x + h) + k$$

où a, b, h et k sont des nombres réels positifs non nuls.

Si $(s + k)$ est la valeur de l'ordonnée à l'origine de la fonction $f(x)$ où s est un nombre réel positif non nul, montrez que :

$$h = \frac{1}{b}\sin^{-1}\frac{s}{a} \quad \text{ou} \quad h = \pi - \frac{1}{b}\sin^{-1}\frac{s}{a}$$

Solution

$$\begin{aligned} f(0) = s + k \Rightarrow s + k &= a \sin b(0 + h) + k \\ &\Rightarrow s + k - k = a \sin bh \\ &\Rightarrow s = a \sin bh \\ &\Rightarrow \frac{s}{a} = \sin bh \\ &\Rightarrow bh = \sin^{-1}\frac{s}{a} \\ &\Rightarrow h = \frac{1}{b}\sin^{-1}\frac{s}{a} \quad \text{ou} \quad h = \pi - \frac{1}{b}\sin^{-1}\frac{s}{a} \end{aligned}$$

Réponse : $\mathbf{h = \frac{1}{b}\sin^{-1}\frac{s}{a}}$ **ou** $\mathbf{h = \pi - \frac{1}{b}\sin^{-1}\frac{s}{a}}$