MAT-5171

Fonctions réelles

1. Réciproque d'une fonction

Fonction	*Étapes* :	*Fonction* réciproque
$x: f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 2x + 6$	• *Interchanger x et y* $x = 2y + 6$ • *Isoler y* $x - 6 = 2y$ $\frac{1}{2}x - 3 = y$	$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 3$

2.Opération de base sur les fonctions

- o $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- o $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- o $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- o $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

- o $dom\ (f + g) = dom(f - g) = dom(f \cdot g) = dom\ f \cap dom\ g$
- o $dom\left(\frac{f}{g}\right) = \ dom\ f \cap dom\ g \setminus \{x \in \mathbb{R} | g(x) = 0\}$

3. Composition de fonctions

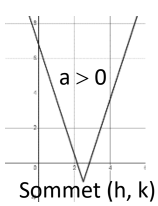
Fonction	*Fonction*
$x: \quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 2x + 1$	$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = x^2 + 4$
$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ $(f \circ g)(x) = f(x^2 + 4)$ $(f \circ g)(x) = 2(x^2 + 4) + 1$ $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 9$	$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ $(g \circ f)(x) = g(2x + 1)$ $(g \circ f)(x) = (2x + 1)^2 + 4$ $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x + 5$

4. Fonction définie par parties

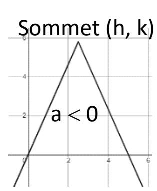
○ Ex : $f(x) = \begin{cases} -5x^2 + 1{,}25, & si\ 0 \leq x < 0{,}5 \\ -t + 0{,}5, & si\ \ 0{,}5 \leq x < 1{,}5 \\ -1 & si\ \ x \geq 1{,}5 \end{cases}$

5. Fonction valeur absolue

○ $\boldsymbol{f(x) = a|b(x - h)| + k}$



Axe de symétrie : x = h

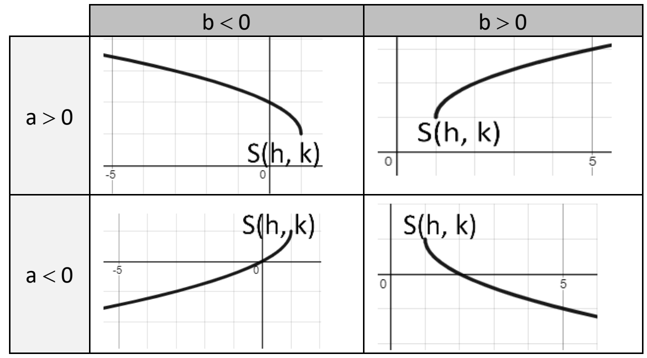


○ Propriétés :

- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

5. Fonction racine carrée

o $\boldsymbol{f(x) = a\sqrt{b(x - h)} + k}$



- Pour que la fonction soit bien définie : $b(x - h) \geq 0$
- si b > 0, on utilise : $f(x) = a\sqrt{(x - h)} + k$
- si b < 0, on utilise : $f(x) = a\sqrt{-(x - h)} + k$

o Réciproque : représentée par une branche de la parabole
Ex : $f(x) = 2\sqrt{x + 3} - 1$
$f^{-1}(x) = \frac{1}{4}\ (x + 1)^2 - 3$ pour x ≥ 1

- L'image de la fonction est le Domaine de la réciproque

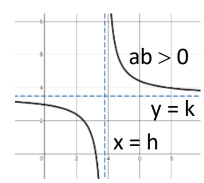
○ Propriétés :

- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ *pour tout* $a \geq 0$ *et* $b \geq 0$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ *pour tout* $a \geq 0$ *et* $b > 0$
- $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ *pour tout* $a \geq 0$

6. Fonction rationnelle

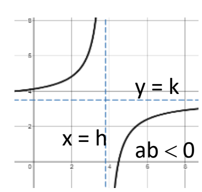
○ Forme canonique **:** $\boldsymbol{f(x) = \frac{a}{b(x-h)} + k}$

- Dom : $\mathbb{R} \setminus \{h\}$
- Ima : $\mathbb{R} \setminus \{k\}$
- Asymptotes : $x = h$ *et* $y = k$



○ Forme générale : $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$

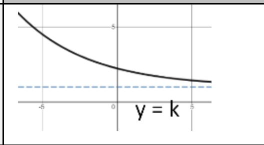
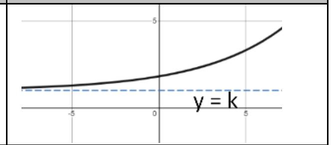
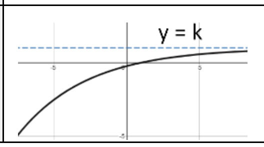
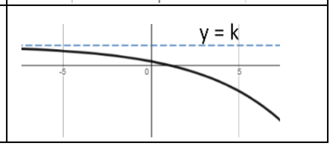
- Dom : $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$
- Ima : $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$
- Asymptotes : $x = -\frac{d}{c}$ *et* $y = \frac{a}{c}$



○ Réciproque : fonction rationnelle

7. Fonction exponentielle

○ $f(x) = a(c)^{b(x-h)} + k$

	b < 0	b > 0
a > 0		
a < 0		

- ○ $f(x) = a(c)^{bx}$
  - a : valeur initiale
  - b : nombre de périodes par unité de temps
  - c : facteur multiplicatif

○ Ex : Une culture bactérienne renferme 120 bactéries au départ. Elle augmente de 5% chaque 2h.

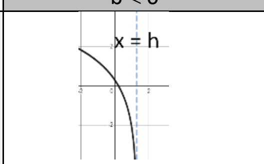
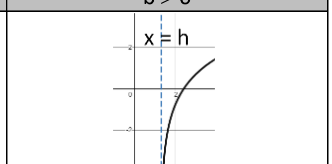
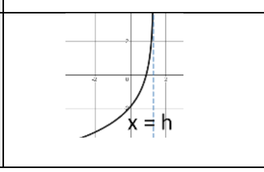
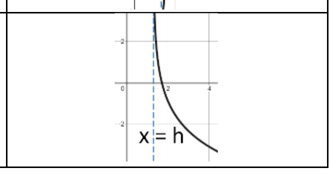
$$f(x) = 120\,(1{,}05)^{\frac{1}{2}t}$$

○ Propriété : $c^u = c^v$
$u = v$

○ Réciproque : fonction logarithmique

8. Fonction logarithmique

○ $f(x) = a \log_c b(x-h) + k$

	b < 0	b > 0
a > 0		
a < 0		

- Asymptote : $x = h$

○ Réciproque : fonction exponentielle

Ex : $f(x) = 2\,(3)^{\frac{1}{4}(x-1)} + 5$

$$f^{-1}(x) = 4\,\log_3 \frac{1}{2}(x-5) + 1$$

9. Logarithmes

○ Définition : $\log_c p = q \quad \Leftrightarrow \quad c^q = p \qquad (c > 0, c \neq 1, p > 0)$

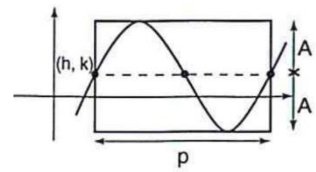
○ Calculs :

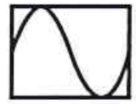
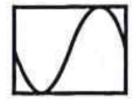
- $\log_c 1 = 0$
- $\log_c c = 1$
- $\log_c c^n = n$
- $c^{\log_c M} = M$
- $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$
- $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$
- $\log_c a^n = n \log_c a$
- $\log_c x = \frac{\log_m x}{\log_m c}$ (loi de changement de base)
- $\log_c p = \log_c q \Leftrightarrow p = q$ (équation logarithmique)

10. Fonction sinus

x = h

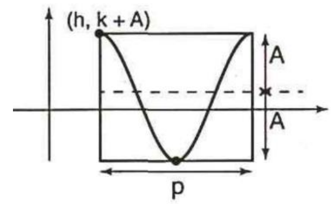
○ $f(x) = a \sin b(x-h) + k$

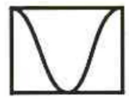
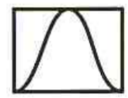


- Point de départ d'un cycle : (h, k)
- Amplitude : $A = |a|$
- Période : $p = \frac{2\pi}{|b|}$
- Équation : $\sin\theta = k$
- $ab > 0$:  $ab < 0$: 
- Dans $[0, 2\pi[$, $\theta_1 = \sin^{-1} k \;\; et \;\; \theta_2 = \pi - \theta_1$
- Dans $\mathbb{R}$, $S = \{\theta_1 + 2\pi n, \theta_2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$

11. Fonction cosinus

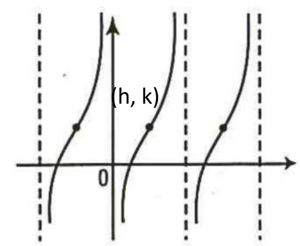
○ $f(x) = a \cos b(x-h) + k$



- Point de départ d'un cycle : (h, k + a)
- Amplitude : $A = |a|$
- Période : $p = \frac{2\pi}{|b|}$
- Équation : $\cos\theta = k$
- $ab > 0$:  $ab < 0$: 
- Dans $[0, 2\pi[$, $\theta_1 = \cos^{-1} k \;\; et \;\; \theta_2 = 2\pi - \theta_1$
- Dans $\mathbb{R}$, $S = \{\theta_1 + 2\pi n, \theta_2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$

12. Fonction tangente

○ $f(x) = a \tan b(x-h) + k$



- Point d'inflexion : (h, k)
- Point au ¼ :$(h - \frac{p}{4}, k - a)$
- Point au ¾ : $(h + \frac{p}{4}, k + a)$
- Période : $p = \frac{\pi}{|b|}$
- Équation d'une asymptôte : $x = h \pm \frac{p}{2}$
- Équation : $\tan\theta = k$
- Dans $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\theta_1 = \tan^{-1} k$
- Dans $\mathbb{R}$, $S = \{\theta_1 + \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$

Par Emilie Cholette C.S.S. de la Capitale
(Très fortement inspirée de l'aide-mémoire d'un inconnu)